جامعة البعث	امتحان مقرر جبر (4)	المدة : ساعة ونصف
كلية العلوم	لطلاب السنة الرابعة رياضيات - جبر	العلامة : 100
قسم الرياضيات	الفصل الثاني للعام الدراسي 2017/2016	اسم الطالب

السؤال الأول (15 علامة)

لتكن T مجموعة غير خالية من نصف زمرة S . أثبت أن الشرط اللازم والكافي كي تكون T زمرة جزئية من S هو أن يتحقق الشرط $T = Ta = aT$; $\forall a \in T$.

السؤال الثاني (20 علامة)

أ) لتكن S نصف زمرة و ρ_a رمز السحب اليميني الداخلي ، برهن أن $\{\rho_a : a \in S\}$ هي نصف زمرة جزئية من $\mathcal{T}(S)$

ب) أثبت أنه إذا كانت نصف الزمرة S تملك عنصراً محايداً فإن كل انسحاب يميني لنصف الزمرة S يكون داخلي

السؤال الثالث (10 علامات)

لتكن S نصف زمرة دورية مولدها a أي أن $\langle a \rangle = S$ ، فأثبت أنه إذا كانت $\langle a \rangle$ غير منتهية فإنها تكون إيزومورفية مع نصف الزمرة $(\mathbb{N}, +)$ حيث $\mathbb{N}$ مجموعة الأعداد الطبيعية ومعرف عليها عملية الجمع العادية

السؤال الرابع (20 علامة)

أثبت أن الشرط اللازم والكافي كي تكون نصف الزمرة الدورية الاختزالية اليسارية S زمرة هو أن تملك عنصراً محايداً وحيداً

السؤال الخامس (20 علامة)

لتكن G زمرة ما و τ طوبولوجيا على G ، أثبت أن الشرط اللازم والكافي كي تكون G زمرة طوبولوجية هو أن يكون التطبيق $g_1 : G \times G \to G$ حيث $g_1(x, y) = xy^{-1}$ مستمراً في كلا المتحولين

السؤال السادس (15 علامة)

أثبت أن كل زمرة طوبولوجية تملك جملة أساسية متناظرة $\{U\}$ لجوارات العنصر الحيادي

حمص في 10 / 7 / 2017 د. [illegible]

سلم تصحيح مقرر بنى جبرية (٤)

لطلاب السنة الرابعة رياضيات - جبر

الفصل الثاني للعام الدراسي ٢٠١٦/٢٠١٧

السؤال الأول: [15]

لزوم الشرط:

$$T \text{ زمرة} \Rightarrow \begin{cases} aT \subseteq T ;\ \forall a \in T \\ \forall x \in T \Rightarrow ex = a a^{-1} x \in aT \Rightarrow T \subseteq aT \end{cases} \Rightarrow$$

$aT = T$ وبشكل مشابه نبرهن أن $Ta = T$. (8)

كفاية الشرط:

لنفرض أن الشرط محقق ولنبرهن أن T زمرة جزئية من S

من الشرط $aT = T$ ، $\forall a \in T$ يعني أن T مغلقة بالنسبة لعملية الضرب

وبالتالي فهي نصف زمرة جزئية من S (أي هي نصف زمرة تحقق الشرط)

حسب ملاحظة تكون T زمرة وبالتالي زمرة جزئية من S (7)

السؤال الثاني: [20]

1) ليكن ρ_a و ρ_b عنصرين من مجموعة الإنسحابات اليمنية للمجموعة S، $\forall x \in S$ لدينا:

$$\rho_a \rho_b (x) = \rho_a(\rho_b(x)) = \rho_a(xb) = (xb)a = x(ba) = \rho_{ba}(x)$$

أي أن $\rho_a \rho_b = \rho_{ba}$ (10) أي أن المجموعة $\{\rho_a ; a \in S\}$ مغلقة بالنسبة للضرب

فهي نصف زمرة جزئية من $\mathcal{T}(S)$،

2) ليكن ρ انسحاباً يمنياً لـ S و 1 حيادياً يمينياً لـ S عندها يكون $x \in S$ لدينا

$$x\rho(1) = \rho(x \cdot 1) = \rho(x) \Rightarrow \rho_{\rho(1)}(x) = \rho(x) \Rightarrow \rho_{\rho(1)} = \rho \quad (10)$$

أي الانسحاب اليمني هو انسحاب يميني داخلي.

السؤال الثالث: [10]

لتكن $\langle a \rangle$ غير منتهية ولنعرف التطبيق $\varphi : \langle a \rangle \to \mathbb{N}$ حيث $\varphi(a^n) = n$

حيث أن $(\mathbb{N}, +)$ نصف زمرة الأعداد الطبيعية مع الجمع العادي ولنبرهن أنه

تقابل:

$$\forall a^n, a^m \in \langle a \rangle ;\ \varphi(a^n) = \varphi(a^m) \Rightarrow n = m \Rightarrow a^n = a^m$$

أي أن φ متباين. (5)

ومهما تكن $n \in N$ فإن $a^n \in \langle a \rangle$ بحيث أن $\varphi(a^n) = n$ وبالتالي φ غامر

وكذلك φ هوموموفيزم
$$\varphi(a^n \cdot a^m) = \varphi(a^{n+m}) = n+m = \varphi(a^n) + \varphi(a^m)$$ (5)

السؤال الرابع: [20] في نصف الزمرة الدورية الاختزالية اليسارية

- ليكن e العنصر الجامد الوحيد في $\langle a \rangle$ منتهية وبالتالي لها الدور m والأساس r

مهما يكن $a \in S$ فإن $\langle a \rangle$ فإن: $a^{r+m} = a^r$ (5) $\Leftarrow a^{r+m-1} = a\, a^{r-1}$

لنفرض جدلاً أن $r > 1$ فإن: $a^{r+m-1} = a^{r-1}$ (5) ولكن هذا يناقض تعريف

وبما أن S اختزالية يسارية فإن $r = 1$ أي أن الفرض الجدلي خاطئ ومنه $\langle a \rangle = K_a$

m و r فالفرض الجدلي خاطئ … وبالتالي $\langle a \rangle$ زمرة جزئية من S حياديها e لأن e الجامد الوحيد في S وبالتالي

$$ea = ae = a \;;\; \forall a \in S$$

فالجامد e هو حيادي S (5) و $a \in \langle a \rangle$ له نظير في $\langle a \rangle$ وبالتالي له نظير في S أي أن S زمرة.

- إذا كانت S زمرة فإن حياديها هو العنصر الجامد الوحيد فيها لأنه

لو كان يوجد آخر مثل a فإن: (5) $a = a^2 \Rightarrow ae = aa \Rightarrow a = e$

السؤال الخامس: [20]

- إذا كانت G زمرة طبولوجية فإن كلاً من التطبيقين $g_1: G \times G \to G$ حيث xy

و $g_2: G \to G$ حيث $g_2(x) = x^{-1}$ يكون مستمراً ولنبرهن أن التطبيق $G \times G \to G$

حيث $g_3(x,y) = xy^{-1}$ مستمر.

لتكن W مجاورة للعنصر xy^{-1} وبما أن g_1 مستمر فإنه توجد مجاورة U للعنصر x

و V مجاورة للعنصر y^{-1} بحيث يكون $UV \subseteq W$. V مجاورة للعنصر y^{-1} و g_2 مستمر

إذن توجد مجاورة V_1 للعنصر y بحيث يكون (10) $V_1^{-1} \subseteq V \Leftarrow UV_1^{-1} \subseteq UV \subseteq W$

أي أن g_3 مستمر.

- بفرض أن التطبيق $g_3: G \times G \to G$ حيث $g_3(x,y) = xy^{-1}$ مستمر فإن

$g_3: (e,y) \to ey^{-1} = y^{-1}$ يكون مستمراً في النقطة (e,y) بالنسبة لـ y أي أنه

أجل أي مجاورة W للعنصر y^{-1} توجد مجاورة U للعنصر y بحيث يكون

$e\in u^{-1}\subseteq W$ أو $u^{-1}\subseteq W$ وبالتالي فإن التطبيق $g_2: G\to G$ حيث $g_2(x)=x^{-1}$

يكون مستمراً، كما أنه من أجل أي مجاورة W للعنصر xy توجد مجاورة

u للعنصر x و V مجاورة للعنصر y^{-1} بحيث يكون $g_3(u\times V)\subseteq W \Leftarrow$

$uV^{-1}\subseteq W$ ولكن V^{-1} مجاورة للعنصر y أي أنه من أجل أي مجاورة W

للعنصر xy وجدنا المجاورة u للعنصر x والمجاورة V^{-1} للعنصر y بحيث يكون

$uV^{-1}\subseteq W$ وبالتالي $g_1: G\times G\to G$ حيث $g_1(x,y)=xy$ مستمر أي أن (10)

G زمرة طبولوجية.

السؤال السادس: (15)

لتكن $\{V\}$ جملة أساسية من المجاورات المفتوحة للعنصر e، بما أن $e=e^{-1}$

وأن g_2 هوميومورفيزم يكون من أجل أي V من $\{V\}$ فإن V^{-1} مجاورة

مفتوحة للعنصر e، فإذا أخذنا $u=V\cap V^{-1}$ (8) فإن u تكون مجاورة

متناظرة للعنصر e وذلك لأن $u^{-1}=V\cap V^{-1}=u$، وبما أن كل V تحوي

مجاورة u بالتالي فإن كل مجاورة للعنصر e تحوي مجاورة V و V تحوي

u ينتج أن $\{u\}$ هي جملة أساسية لمجاورات e وهي تناظرية (7)

د. عصام نسيم